Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
09.07.2008

Übungen zur Analysis 2

Blatt 1

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 16.10.2008

Aufgabe 1* (4 Punkte)

Zeige:

(a) $\arctan x = 2 \arctan \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\arctan x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$, für $|x| \leq 1$.

Aufgabe 2* (Youngsche Ungleichung) (3 Punkte)

Es seien $x, y \in \mathbb{R} : x \geq 0, y \geq 0$. Weiter seien $p, q \in \mathbb{R} : p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeige:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Hinweis

Diskutiere die Hilfsfunktion $h(t) = \frac{1}{p} + \frac{t^q}{q} - t$, und betrachte $t = yx^{-\frac{p}{q}}$.

Aufgabe 3* (3 Punkte)

Beweise: e ist irrational.

Hinweis

$0 < |n!(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})| < \frac{e}{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4* (3 Punkte)

Bestimme, falls existent, alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f(x) = (x-1)^3 e^x$$

auf $\mathbb{R}$, und skizziere f.

Aufgabe 5* (3 Punkte)

Es sei $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \log \cos x$. Berechne die Taylorreihe $T_2(x)$ um $x_0 = 0$ bis zum quadratischen Glied und zeige, dass für $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ gilt:

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{2x^3}{3}.$$

Aufgabe 6* (Leibnizformel) (4 Punkte)

Die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien n-mal differenzierbar in $x_0 \in I$. Zeige: Dann ist $f \cdot g$ n-mal differenzierbar in x_0, und es gilt die Leibnizformel

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)g(x)\Big|_{x=x_0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$